Soluții

1\. a) $a^x=t \Rightarrow I_t=\frac{1}{\ln a}\int\frac{t}{(a+t^2)^{2020}}\,dt=$

$$=-\frac{1}{4038\ln a}\cdot\frac{1}{(a+t^2)^{2019}}+C \Rightarrow I_x=-\frac{1}{4038\ln a}\,\frac{1}{(a+a^{2x})^{2019}}$$

b) Din $F\circ f=1_{\mathbb{R}} \Rightarrow F$ surjecție și f injecție.
f injectivă și f are primitive $\Rightarrow f$ strict monotonă.
i) $(\exists)\ a\in\mathbb{R}:\ f(a)=0 \Rightarrow F$ are în $x_0=a$ punct de extrem global. $\Rightarrow F$ nesurjectivă.
ii) $f(a)\neq 0,\ (\forall)\ a\in\mathbb{R} \Rightarrow F'=f$ are semn constant $\Rightarrow F$ este strict monotonă $\Rightarrow F$ injectivă.
Cum F este surjectivă rezultă că F este bijecție.
Obținem $F^{-1}=f \Rightarrow f$ surjecție $(F!)$

2\) a) $x^6=\hat{1} \Rightarrow$ ecuația devine: $x^4=\hat{4} \Rightarrow x\in\{\hat{3},\hat{4}\}$.

b) „$\Leftarrow$" $a=b \Rightarrow x=e$.
„$\Rightarrow$" $\begin{cases}x=a^{-1}e\\ x=b^{-1}a\end{cases} \Rightarrow a^{-1}b=b^{-1}a \Rightarrow b=ab^{-1}a \Rightarrow$

$\Rightarrow e=ab^{-1}ab^{-1} \Rightarrow (ab^{-1})^2=e \Rightarrow ord(ab^{-1})\,|\,2$

Cum ord G = impar $\Rightarrow ab^{-1}=e \Rightarrow a=b$

3\) a) $f: G\to\mathbb{C}^*$, $f\left(\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\right)=a+ib$ izom.

b) $$A^n=\begin{pmatrix}\frac{(a+bi)^n+(a-bi)^n}{2} & \frac{(a+bi)^n-(a-bi)^n}{2i}\\ -\frac{(a+bi)^n-(a-bi)^n}{2i} & \frac{(a+bi)^n+(a-bi)^n}{2}\end{pmatrix}$$

c) $A\in H \Rightarrow A^n=I_2 \xRightarrow{\det A>0} \det A=1 \Rightarrow a^2+b^2=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=\cos t,\ b=\sin t \Rightarrow \begin{pmatrix}\cos nt & \sin nt\\ -\sin nt & \cos nt\end{pmatrix}=I_2 \Rightarrow t=\frac{2k\pi}{n}$.